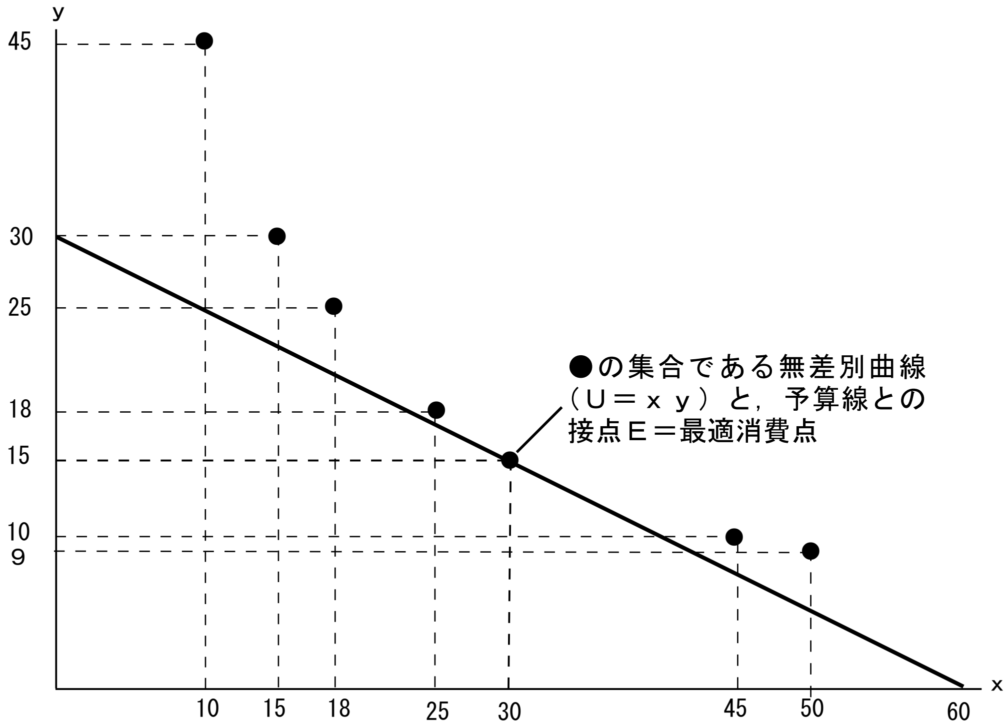
Part1213 ◆最大の満足を追求する消費者の「最適消費点」－その３

Part1212 に引き続き，「最適消費点」の登場です。今度はいよいよ，微分を用いる計算問題となります。
では，Part1104 で見ていただいた例題 4-1 に，例題 13-1 として再登場していただきましょう。

例題 13-1（例題 4-1）

ある家計の効用関数がＵ＝ｘｙで示されているとする。この家計の所得が 6000 円，Ｘ財の価格が 100 円，Ｙ財の価格が 200 円であるとき，効用最大をもたらすＸ財の最適購入量はいくらか。

1.　20 個　　2.　24 個　　3.　30 個　　4.　36 個　　5.　40 個



Part1104 では，この問題が微分を使わずに解けることをお話しました。
また，直前の Part1212 では，
[無差別曲線の傾き（限界代替率ＭＲＳ）＝予算線の傾き（価格比）]
となるポイント（上図ではＥ点）が最適消費点となることをお話しました。

例題 13-1

ところで，Ｕ＝ｘｙの値（ここでは 450）がわかっていれば，展開はラクなのですが，この値が不明であったり，算出困難なときはどうすればいいのでしょうか。
そんなときには，微分計算によって「限界効用」という値を求める必要があるのです。そこで，まずはこの「限界効用」とは何なのか。そして，それを求めるための微分計算について見ていくことにしましょう。

１）限界効用ＭＵ：Marginal Utility

「限界効用」とは，「ある財の消費量を１単位（１個）だけ増やしたときの効用Ｕの増加値」です。ここでは，Ｕ＝ｘｙなのですから，

①　もし，Ｘ財の消費量ｘを１増やすと，Ｕの値はｙの分だけ増えます。
例えば，ｘ＝30，ｙ＝15のとき，Ｕ＝30×15＝450となります。
ここで，ｘを１増やすと，Ｕ＝31×15＝465で，Ｕは15増えます。

②　もし，Ｙ財の消費量ｙを１増やすと，Ｕの値はｘの分だけ増えます。
同様に，ｘ＝30，ｙ＝15のとき，Ｕ＝30×15＝450となります。
ここで，ｙを１増やすと，Ｕ＝30×16＝480で，Ｕは30増えます。

ところで，上記の

①は $\dfrac{\Delta U}{\Delta x}=15$ と表現されますが，これこそが限界効用「ＭＵｘ」です。

②は $\dfrac{\Delta U}{\Delta y}=30$ と表現されますが，これこそが限界効用「ＭＵｙ」です。

ところで，ｘ＝30，ｙ＝15は最適消費点ですから，最適消費点においては，

$\dfrac{MUx}{MUy}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{Px}{Py}=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}$ という関係が成立しています。

２）効用Ｕの値が不明な場合の限界効用の求め方

もう，察しがついている方もいると思いますが，効用Ｕの値が不明な場合，「Ｕをｘで微分」,「Ｕをｙで微分」という２度の微分を行うことになります。

Step １）Ｕをｘで微分します。このとき,「ｙはｘの係数である」と考えます。

$U=y\cdot x^{1}$ → 微分すると，$MUx=1\cdot y\cdot x^{1-1}=y\cdot x^{0}=y$

Step ２）Ｕをｙで微分します。このとき,「ｘはｙの係数である」と考えます。

$U=x\cdot y^{1}$ → 微分すると，$MUy=1\cdot x\cdot y^{1-1}=x\cdot y^{0}=x$

３）Ｘ財の消費量を求めます

上記より，$\dfrac{MUx}{MUy}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{Px}{Py}=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}$ となりますから，

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$　両辺にｘをかけると，$y=\dfrac{1}{2}x$

この結果を予算線の式（100ｘ＋200ｙ＝6000）に代入します。

つまり　$100x+200\cdot\dfrac{1}{2}x=6000$

$200x=6000$　　$x=30$（個）よって,「正解3」となります。

４）加重限界効用均等の法則

上記より，$MRS=\dfrac{MUx}{MUy}=\dfrac{Px}{Py}$ となるわけですが，変形すると，

$\dfrac{MUx}{Px}=\dfrac{MUy}{Py}$ となります。

これを「加重限界効用均等の法則」といい，Ｘ，Ｙ両財の価格１あたりの効用が等しいことを意味します。

問題 13-1

※Part ４で簡単に紹介した問題です。
　小さな 1/3 は「３分の１乗」，小さな 2/3 は「３分の２乗」です。

　ある家計の効用関数が $U = x^{1/3} \cdot y^{2/3}$ で表されるとする。
　所得が 120，Ｘ財の価格が１，Ｙ財の価格が４であるとき，効用最大化をもたらす最適消費量はそれぞれいくらか。

	x	y
1.	20	25
2.	24	24
3.	36	21
4.	40	20
5.	48	18

　実はこの問題，微分を使わずに解く裏ワザがあるのですが，まずは微分を使って解きましょう。

①　ＭＵｘとＭＵｙを求めます。

② $\dfrac{MUx}{MUy} = \dfrac{Px}{Py}$ とし，ｙ＝○ｘ，またはｘ＝○ｙの式を導きます。

③　上記②の結果を予算線の式に代入して，ｘ，ｙを求めます。

◆「３分の１乗」とか「３分の２乗」って，いったいどんな値でしょうか？
　これは，経済学の問題を解くうえでは必要ない知識とは思いますが，紹介しておきましょう。

$10^3 = 1000$　←　ひっくり返しで　→　$1000^{1/3} = 10$

$1000^{2/3} = 10^2 = 100$

$10^4 = 10000$　←　ひっくり返しで　→　$10000^{1/4} = 10$

$10000^{2/4} = 10^2 = 100$

$10000^{3/4} = 10^3 = 1000$

　ちなみに，$10000^{2/4} = 10000^{1/2}$ となりますが，この 1/2 乗は√（ルート）と同じです。つまり，

$100^2 = 10000$　←　ひっくり返しで　→　$10000^{1/2} = \sqrt{10000} = 100$

となります。

問題 13-1

①　微分の仕方は今までと同じです。

$$U=y^{2/3}\cdot x^{1/3}\ \rightarrow\ MUx=\frac{1}{3}\cdot y^{2/3}\cdot x^{1/3-1}=\frac{1}{3}y^{2/3}x^{-2/3}$$

$$U=x^{1/3}\cdot y^{2/3}\ \rightarrow\ MUy=\frac{2}{3}\cdot x^{1/3}\cdot y^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}$$

②　例えば $\frac{10^5}{10^3}=10^{5-3}=10^2$ となりますから，

$$\frac{MUx}{MUy}=\frac{\frac{1}{3}y^{2/3}\cdot x^{-2/3}}{\frac{2}{3}x^{1/3}\cdot y^{-1/3}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-2/3-1/3}\cdot y^{2/3-(-1/3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x^{-1}\cdot y^{1}=\frac{1y}{2x}$$　　※ $x^{-1}=\frac{1}{x}$ です。

②　価格比は $\frac{1}{4}$ ですから，

$$\frac{y}{2x}=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ y=\frac{1}{2}x$$

③　$x+4y=x+4\cdot\frac{1}{2}x=3x=120$

$x=40$，$y=20$　「正解 4」となります。

◆裏ワザについて

効用関数が $U=x^a\cdot y^b$ の形のとき，
微分を使わなくても，次の数式で２財の最適消費量を算出することができます（Ｐは価格，Ｍは所得）。

しかし，なぜこのような式で解けるかの根拠を示そうとすれば，けっこう細かな数式変化の過程を示す必要があり，それこそ，数学的な解釈力が必要となります。そのため，ここでは裏ワザの紹介にとどめさせていただきます。

$$x=\frac{aM}{Px(a+b)}$$

$$y=\frac{bM}{Py(a+b)}$$

上記は，両方行う必要はありません。例えば，上記の式で x を求めたら，その値を予算線の式に代入することで，y を求められます。
この裏ワザは問題 12-1 のみならず，例題 12-1 でも使うことができます。

問題 13-2（2010 年東京特別区Ⅰ類アレンジ）

　ある消費者が貨幣所得のすべてをＸ財，Ｙ財の購入に支出するとし，
　この消費者の効用関数は，　Ｕ＝ｘ（２＋ｙ）　で示される。

Ｕ：効用水準
ｘ：Ｘ財の消費量
ｙ：Ｙ財の消費量

　この消費者の貨幣所得は 120，Ｘ財の価格が８，Ｙ財の価格が４であるとき，この消費者が効用を極大にするような消費行動をとるとしたら，効用はいくらになるか。

1.　120
2.　126
3.　128
4.　136
5.　144

　この問題では，前ページの裏ワザは使えません。効用関数が$U=x^{a}\cdot y^{b}$の形とは異なるからです。

①　ＭＵｘとＭＵｙを求めます。

②　$\dfrac{MUx}{MUy}=\dfrac{Px}{Py}$ とし，ｙ＝○ｘ，またはｘ＝○ｙの式を導きます。

③　上記②の結果を予算線の式に代入して，ｘ，ｙを求めます。

④　上記③で求めたｘ，ｙの値を効用関数に代入します。

問題 13-2

①　微分は，下線部ごとに行います。

$$U=\underline{2\cdot x^{1}}+\underline{y^{1}\cdot x^{1}} \rightarrow MUx=1\cdot 2\cdot x^{1-1}+1y^{1}\cdot x^{1-1}$$
$$=2+y$$

$$U=\underline{2\cdot x^{1}}+\underline{x^{1}\cdot y^{1}} \rightarrow MUy=0+1x^{1}\cdot y^{1-1}$$
$$=0+x$$

↑
２ｘにはｙが含まれないので，
ｙで微分すると０になります。

②　$\dfrac{MUx}{MUy}=\dfrac{2+y}{x}=\dfrac{8}{4}=2$

$2+y=2x$
$y=2x-2$

③　$8x+4y=120$
$8x+4(2x-2)=120$
$8x+8x-8=120$
$16x=128$
$x=8$

$8\cdot 8+4y=120$
$4y=120-64=56$
$y=14$

④　$U=2x+xy=2\cdot 8+8\cdot 14=16+112=128$

「正解 3」となります。

この問題でも，予算線の式を利用すれば，比較的ラクに解けそうです。

$8x$	$+4y$	$=120$	$U=2x+xy$		
↓	↓				
15	0		30＋ 0	＝ 30	
14	2		28＋ 28	＝ 56	
13	4		26＋ 52	＝ 78	
12	6		24＋ 72	＝ 96	
11	8		22＋ 88	＝ 110	
10	10		20＋100	＝ 120	
9	12		18＋108	＝ 126	
8	14		16＋112	＝ 128	効用最大
7	16		14＋112	＝ 126	
6	18		12＋108	＝ 120	
5	20		10＋100	＝ 110	
・	・		・＋・	＝ ・	
・	・		・＋・	＝ ・	

実は，この問題のオリジナルは，「貨幣１単位当たりの効用」が求められていました。得られた値（Ｐｘ＝８，Ｐｙ＝４，ＭＵｘ＝２＋ｙ，ＭＵｙ＝ｘ，ｘ＝８，ｙ＝14）を次の式に代入すると，答は２となります。

$$\frac{MUx}{Px}=\frac{MUy}{Py}\qquad \frac{2+14}{8}=\frac{8}{4}=2$$