Part1207 ◆今，この瞬間の速さはいくら？（微分の基礎）

まずは微分の計算技術を用いることなく，微分計算を行ってみます。もちろん，決して実用的なアプローチではないのですが，試してみましょう。

次に示すのは，ある移動物体の進行状況の経緯です。このような移動物体があるものと仮定して考えましょう。

スタートの	スタート地点の	直前の１秒で	速さ①
１秒後は	１ｍ前方	１－０＝１ｍ前進	秒速１ｍ
２秒後は	４ｍ前方	４－１＝３ｍ前進	秒速３ｍ
３秒後は	９ｍ前方	９－４＝５ｍ前進	秒速５ｍ
４秒後は	16ｍ前方	16－９＝７ｍ前進	秒速７ｍ
↑	↑	↑	↑
ｘ	$y=x^2$	１秒ごとの移動距離	直前の１秒の速さ

この仮定のもとでは，ｙとｘの間に　$y=x^2$　という関係（関数）が成立しています。

ところで，今は「なぜ（Why?)」にこだわらないでいただきたいのですが，$y=x^2$のとき，ｙをｘで微分すると，$y=2x$　になります（どんな計算をすると２ｘになるのかは後述します)。そしてこの２ｘは，その瞬間の速さを意味します。ですから，

スタートの	スタート地点の	直前の１秒で	速さ②
１秒後は	１ｍ前方	１－０＝１ｍ前進	秒速２ｍ
２秒後は	４ｍ前方	４－１＝３ｍ前進	秒速４ｍ
３秒後は	９ｍ前方	９－４＝５ｍ前進	秒速６ｍ
４秒後は	16ｍ前方	16－９＝７ｍ前進	秒速８ｍ
↑	↑	↑	↑
ｘ	$y=x^2$	１秒ごとの移動距離	２ｘ

さて，速さ①と速さ②は一致しないのですが，いったいどちらが正しいのでしょうか？…直前の１秒（１秒ごと）の移動距離から判断すると，速さ①が正しいように思われますが，実は，どちらも正しいのです。

すでにお気づきの方がいるかもしれませんが，速さ①は，「直前の１秒間の移動距離をもとに算出した速さ」であり，②は，「その瞬間の移動距離をもとに算出した速さ」という違いがあります。

ところで，「瞬間」というのはどのくらいの間でしょうか？ 100 分の１秒，それとも 1000 分の１，はたまた 10000 分の１秒？……追求すればキリがありませんし，あまり桁数が多いと計算がめんどうなので，ここでは 100 分の１秒（0.01 秒）とします。

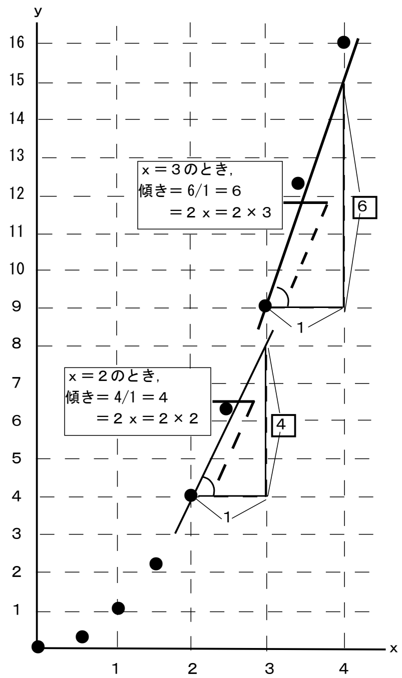
スタートの	スタート地点の	直前の 0.01 秒で	瞬間の速さ②
1.99 秒後は	3.9601 ｍ前方		
2.00 秒後は	4.0000 ｍ前方	0.0399 ｍ前進（約 0.04 ｍ）	秒速４ｍ
：			
2.99 秒後は	8.9401 ｍ前方		
3.00 秒後は	9.0000 ｍ前方	0.0599 ｍ前進（約 0.06 ｍ）	秒速６ｍ
↑	↑	↑	↑
ｘ	$y=x^2$	0.01 秒ごとの移動距離	２ｘ

0.01 秒間（１秒の 100 分の１）での移動距離を 100 倍した値が１秒間での移動距離，すなわち秒速となります。

ところで，微分によって得られる値は，「その瞬間の変化の量（前ページの例では移動距離）」です。
具体的には，xがちょっとだけ変化したときのyの変化量を求めるのですが，実はこれ，グラフの曲線の傾きを意味しています。

右図は$y=x^2$のグラフです。
厳密には，●を結ぶ曲線（放物線と呼ばれる曲線）になります。
また，ここでは，xが正の数の場合に限定しました。

$x=1$のとき，$y=1\times1=1$
$x=2$のとき，$y=2\times2=4$
$x=3$のとき，$y=3\times3=9$
$x=4$のとき，$y=4\times4=16$



さて，直線ならば，その傾きは容易です。例えば$y=2x$のときは，xが1増えるとyは2増えます（yの変化量がxの2倍）。このとき，「傾きは2」と表します。
そして，この傾きは直線上のどの位置でも同じ値になります。

ところが，$y=x^2$のような曲線の場合，接線（曲線と接する直線）の傾きは場所によって異なります。その傾きを求めるためにyをxで微分するのですが，微分すると$y=2x$になることは先にお話ししました。したがって，
　$x=2$のとき，接線の傾き＝4
　$x=3$のとき，接線の傾き＝6
となります。

それでは，$y=x^2$のとき，yをxで微分した値$2x$を瞬時に求めるにはどうすればいいのでしょうか。実は，計算作業としては，いたって単純です。
※⊿y／⊿xは，yをxで微分するという意味で，⊿は「デルタ」と読みます。
※「・」は，かけ算記号を意味します。
※x^2のように係数がついていないときの係数は1であり，$1x^2$となります。
※指数とは，xの右上の小さな数で，$1x^2$の指数は2です。

元の式が　　　　　　　yをxで微分すると，

$y=1x^2$ のとき　　⊿y／⊿x＝$\underbrace{2\cdot1}_{\text{①}}\cdot x^{\overset{\text{②}}{2-1}}=2x^1=2x$

具体的には，
① 微分後のxの係数＝（元の式のxの指数）・（元の式のxの係数）＝2× 1＝2
② 微分後のxの指数＝（元の式のxの指数）－1＝2－1＝1

ですから，例えば，
$y=2x^3$ のとき　　⊿y／⊿x＝$\underline{3\cdot2}\cdot x^{3-1}=6x^2$となります。
これを公式化すると，
型1）$y=ax^m$ のとき　⊿y／⊿x＝$m\cdot a\cdot x^{m-1}$ となります。

※チャレンジしてみましょう。正解は次のページです。
Q1）$y=3x^4$ のとき　⊿y／⊿x＝

型１）　$y=ax^{m}$ のとき　$\Delta y/\Delta x=m\cdot a\cdot x^{m-1}$ となりますから，
Ｑ１）　$y=3x^{4}$ のとき　$\Delta y/\Delta x=4\cdot 3\cdot x^{4-1}=12x^{3}$

さて，ここからはちょっと大変ですが，「ここが辛抱のしどころ」と思って，頑張って習得してください。なぜって，微分ができないと，この先のステージに上ることはできないのですから…。

公務員試験のミクロ経済学では，次のような型（型２，３，４）もしばしば登場します。微分の作業手順は，（型１）と同じですが，下線ごとに微分します。

型２）　$y=\underline{ax^{3}}-\underline{bx^{2}}$ のとき

$$\Delta y/\Delta x=\underline{3\cdot a\cdot x^{3-1}}-\underline{2\cdot b\cdot x^{2-1}}$$
$$=3ax^{2}-2bx^{1}=3ax^{2}-2bx$$

例　$y=\underline{1x^{3}}-\underline{6x^{2}}$ のとき

$$\Delta y/\Delta x=\underline{3\cdot 1\cdot x^{3-1}}-\underline{2\cdot 6\cdot x^{2-1}}$$
$$=3x^{2}-12x^{1}=3x^{2}-12x$$

型３）　$y=\underline{ax^{3}}-\underline{bx^{2}}+\underline{cx^{1}}$ のとき

$$\Delta y/\Delta x=\underline{3\cdot a\cdot x^{3-1}}-\underline{2\cdot b\cdot x^{2-1}}+\underline{1\cdot cx^{1-1}}$$
$$=3ax^{2}-2bx^{1}+cx^{0}$$　（$x^{0}=1$となります。）
$$=3ax^{2}-2bx+c$$

例　$y=\underline{1x^{3}}-\underline{6x^{2}}+\underline{15x^{1}}$のとき

$$\Delta y/\Delta x=\underline{3\cdot 1\cdot x^{3-1}}-\underline{2\cdot 6\cdot x^{2-1}}+\underline{1\cdot 15x^{1-1}}$$
$$=3x^{2}-12x^{1}+15x^{0}$$　（$x^{0}=1$となります。）
$$=3x^{2}-12x+15$$

型４）　$y=\underline{ax^{3}}-\underline{bx^{2}}+\underline{cx^{1}}+\underline{n}$ のとき，
微分結果は（型３）と同じです。

例　$y=\underline{1x^{3}}-\underline{6x^{2}}+\underline{15x^{1}}+\underline{10}$のとき，
微分結果は（型３）と同じです。

ではここで，２つのことを説明させていただきます。

一つは，（型３）のところで，「x^{0} は１になります」と述べたのですが，それはなぜかについてです。

もう一つは，（型４）の微分結果が（型３）と同じになることの理由です。

（型４）の元（微分前）の数式は，（型３）の元の数式とほとんど同じですが，末尾に「＋ｎ」，例では「＋10」が付いています。それなのに，微分結果は変わらないということは，「ｘで微分するとき，ｘが混じらない部分は微分すると０になる」ということを意味しています。

●$x^{0}=1$となる理由

ｘではなく，数字でも同様です。つまり，$10^{0}=1$ですし，$2^{0}=1$です。

下記は，$10^{3}=1000$からスタートして，次々に10で割る（10分の１をかける）という計算を示しています。すると，$10^{0}=1$になることが判明します。

10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

●xで微分すると，「＋10」が0になる理由

ここでは，地上から高く打ち上げられた物体があって，打ち上げ後の経過時間（x秒後）とその物体の地上からの高さ（yメートル）について，

$y=-5x^2+50x$　…　①　という関数（関係）が成立するとします。

瞬間の速さ＝$\Delta y/\Delta x=2\cdot -5\cdot x^{2-1}+1\cdot 50x^{1-1}=-10x+50$

このとき，x秒後の高さ，x秒後の瞬間の速さは次のようになります。

時間	高さy＝	瞬間の速さ＝$\Delta y/\Delta x$
x秒後	$-5x^2+50x$	$-10x+50$
0秒後	$-0+0=0$ m	$0+50=50$ m／秒
1秒後	$-5+50=45$ m	$-10+50=40$ m／秒
2秒後	$-20+100=80$ m	$-20+50=30$ m／秒
3秒後	$-45+150=105$ m	$-30+50=20$ m／秒
4秒後	$-80+200=120$ m	$-40+50=10$ m／秒
5秒後	$-125+250=125$ m	$-50+50=0$ m／秒
6秒後	$-180+300=120$ m	$-60+50=-10$ m／秒

※5秒後が最高到達点で，その瞬間の速さは0，つまり停止しています。
※6秒後の速さが「－」になるのは，落下に転じたことを意味します。

下図は，「$y=-5x^2+50x$…①」の曲線と，これに「＋10」を加えて，「$-5x^2+50x+10$…②」とした曲線です。

②の曲線は，①の曲線を＋10の分，上方に平行移動しただけですから，同じ時間における接線の傾きに違いは生じません。例えば，5秒後の接線の傾きは，①，②ともに0（水平）で，瞬間的に停止しています。

このことからも，xで微分するとき，xが含まれない部分（上記の＋10）は，0になることがわかります。